



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

O5F

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز – ۱۴۰۰/۰۳/۲۹

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراح سؤال	ویراستاران
سیروس نصیری	سید جواد نظری
	ارسلان حسنوند

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

۱- حاصل $A = \sqrt[5]{\sqrt[3]{64} \times \sqrt{2}} (\sqrt{4} - \sqrt{7} + \sqrt{4} + \sqrt{7})$ کدام است؟

$3\sqrt{7}$ (۴)

$2\sqrt{5}$ (۳)

$2\sqrt{6}$ (۲)

$2\sqrt{7}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$B = \sqrt[5]{\sqrt[3]{64} \times \sqrt{2}} = \sqrt[5]{4\sqrt{2}} = \sqrt[5]{(\sqrt{2})^4 \times \sqrt{2}} = \sqrt[5]{(\sqrt{2})^5} = \sqrt{2}$$

$$C = \sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{4 + \sqrt{7}} \Rightarrow C^2 = 4 - \sqrt{7} + 4 + \sqrt{7} + 2\sqrt{(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})}$$

$$\Rightarrow C^2 = 8 + 2\sqrt{16 - 7} = 8 + 2 \times 3 = 14 \Rightarrow C = \sqrt{14}$$

$$A = B \times C = \sqrt{2} \times \sqrt{14} = 2\sqrt{7}$$

۲- جمله هفدهم دنباله $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + n + 2$ چقدر بیشتر از کمترین مقدار $b_n = 2n^2 - 19n$ است؟

۱۷۰ (۴)

۲۱۵ (۳)

۲۱۰ (۲)

۲۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

در دنباله بازگشتی a_n جملات به صورت زیر است:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 + 3$$

$$a_3 = a_2 + 4$$

.

.

.

$$a_{17} = a_{16} + 18$$

اگر طرفین رابطه‌های بالا را با هم جمع کنیم:

$$a_{17} = 2 + 3 + \dots + 18 = \frac{18(19)}{2} - 1 = 9 \times 19 - 1 = 170$$

شماره کمترین مقدار جملات دنباله $b_n = 2n^2 - 19n$ ، نزدیکترین عدد طبیعی به رأس سهمی $y = 2x^2 - 19x$ است.

$$-\frac{b}{2a} = \frac{19}{4} = 4.75$$

پس جمله پنجم b_n کمترین مقدار b_n است.

$$b_5 = 2 \times 25 - 19 \times 5 = 50 - 95 = -45$$

در نتیجه:

$$a_{17} - b_5 = 170 + 45 = 215$$

۳- اگر جواب کامل نامعادله $5 < \frac{2x+1}{x-1} < -1$ به صورت $(n, +\infty) \cup (-\infty, m)$ باشد، آن گاه $m+n$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$|u| > k \xrightarrow{k>0} u > k \text{ یا } u < -k$$

$$-1 < \frac{2x+1}{x-1} < 5 \xrightarrow{-2} -3 < \frac{2x+1}{x-1} - 2 < 3 \Rightarrow -3 < \frac{3}{x-1} < 3 \xrightarrow{\div 3} -1 < \frac{1}{x-1} < 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{x-1} \right| < 1 \xrightarrow{x \neq 1} |x-1| > 1 \Rightarrow x-1 > 1 \text{ یا } x-1 < -1$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

با مقایسه جواب ها:

$$m=0, n=2 \Rightarrow m+n=0+2=2$$

۴- اگر خط $y=m+n$ بر سهمی $y=\frac{k}{3}(x^2-2x-1)$ مماس باشد، طول نقطه تماس کدام است؟

۵ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر خط $y=p$ بر سهمی $y=ax^2+bx+c$ مماس باشد، طول نقطه تماس برابر $-\frac{b}{2a}$ است.پس در این مسئله نیازی به محاسبه پارامترها نیست و جواب مسئله $\frac{3}{2}$ خواهد شد.۵- با حروف کلمه kambiz چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که z, k ابتدا و انتها نباشد؟

۷۲۰ (۴)

۸۶۰ (۳)

۷۶۲ (۲)

۶۷۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

فرض می کنیم که z, k ابتدا و انتها باشد، دو حالت رخ می دهد.

$$k \dots \dots \dots z \Rightarrow ۴! = ۲۴ = \text{تعداد حالات}$$

$$z \dots \dots \dots k \Rightarrow ۴! = ۲۴ = \text{تعداد حالات}$$

تعداد حالت هایی که z, k اول و آخر کلمه نباشد برابر است با:

$$۶! - ۲ \times ۲۴ = ۷۲۰ - ۴۸ = ۶۷۲$$

۶- در ۱۲ داده آماری $\bar{x}=2$ و واریانس σ^2 است. اگر دو داده به اندازه میانگین از داده ها حذف شود، ضریب تغییرات $\sqrt{3}$ خواهد شد، σ^2 چقدر است؟

۷ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

مجموع مربعات انحراف از میانگین های ۱۲ داده آماری را حساب می کنیم:

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{12} - \bar{x})^2 = 12 \times \sigma^2$$

فرض می کنیم که $x_{11} = x_{12} = \bar{x}$ باشد. x_{11} و x_{12} را از بین داده ها حذف می کنیم، پس:

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{10} - \bar{x})^2 = 12 \sigma^2$$

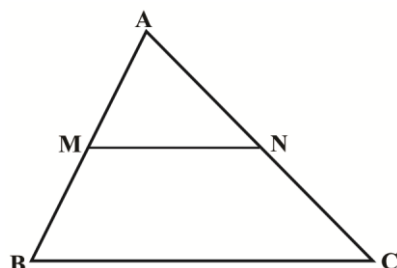
هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



حال اگر طرفین را تقسیم بر ۱۰ کنیم، واریانس جدید $1/25$ خواهد شد.
حال ضریب تغییرات را حساب می‌کنیم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{1/25}}{1} = \sqrt{1/25} = 1/5 \Rightarrow \sigma^2 = 1/25$$

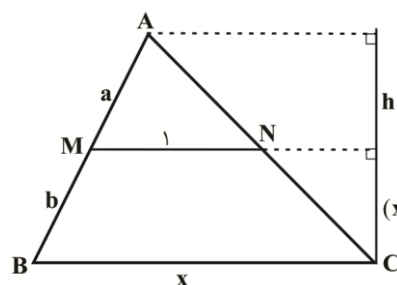
۷- در مثلث شکل مقابل، $MN=1$ را به موازات BC رسم می‌کنیم. اگر مساحت مثلث AMN و دوزنقه $MNCB$ با هم برابر باشند، مقدار BC چقدر است؟



- (۱) $2\sqrt{3}$
- (۲) $\sqrt{3}$
- (۳) $2\sqrt{2}$
- (۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۴

به کمک قضیه تالس داریم:

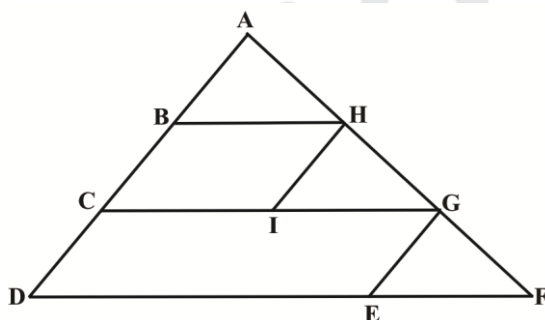


$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = x \Rightarrow b = (x-1)a$$

ارتفاع‌ها را متناسب با اضلاع انتخاب می‌کنیم:

$$S_{AMN} = S_{MNCB} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 1 \times (x-1)h = \frac{1}{2} (x-1)h(x+1) \Rightarrow 1 = x^2 - 1 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

۸- در شکل مقابل دو چهارضلعی $BHIC$ و $CGED$ متوازی الاضلاع‌اند. اگر $AB=BC=CD$ باشد. مساحت دوزنقه $BHGC$ چند برابر مساحت مثلث GEF است؟



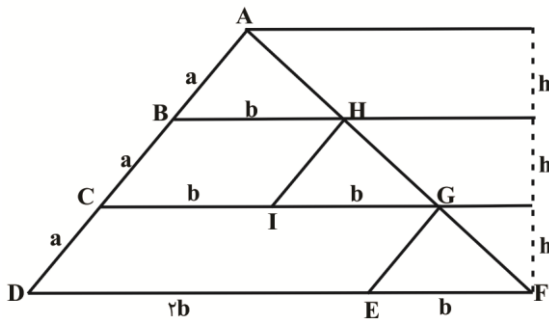
- (۱) $\frac{5}{2}$
- (۲) ۲
- (۳) ۴
- (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



با توجه به قضیه تالس در مثلث‌های ADF و ACG داریم:



$$\frac{S_{BHGC}}{S_{GEF}} = \frac{\frac{1}{2}(b+2b)h}{\frac{1}{2}bh} = 3$$

۹- اگر $\log_3 4 = 1/26$ باشد، حاصل $\log_{18} 24$ کدام است؟

$\frac{289}{263}$ (۴)

$\frac{298}{263}$ (۳)

$\frac{289}{236}$ (۲)

$\frac{298}{236}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

یکی از مهمترین روابط لگاریتم‌ها:

$$\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}$$

$$\log_3 4 = 2 \log_3 2 = 1/26 \Rightarrow \log_3 2 = 0/63$$

$$A = \log_{18} 24 = \frac{\log 24}{\log 18} = \frac{\log 3 \times 8}{\log 2 \times 9} = \frac{\log 3 + 3 \log 2}{\log 2 + 2 \log 3}$$

صورت و مخرج را بر $\log 3$ تقسیم می‌کنیم:

$$A = \frac{1 + 3(\log_3 2)}{(\log_3 2) + 2} = \frac{1 + 3 \times 0/63}{0/63 + 2} = \frac{2/89}{2/63} = \frac{289}{263}$$

۱۰- اگر $f(x)$ تابعی خطی و دامنه تابع $g(x) = \sqrt{f(\frac{x}{2}) - 2x^2}$ بازه $[-2, 6]$ باشد، شیب نمودار تابع $f(x)$ کدام است؟

-12 (۴)

16 (۳)

-16 (۲)

12 (۱)

پاسخ: گزینه ۳

برای محاسبه دامنه g باید نامعادله $f(\frac{x}{2}) - 2x^2 \geq 0$ را حل کنیم. چون ضریب x^2 منفی است، پس جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-2	6	$+\infty$
$f(\frac{x}{2}) - 2x^2$		-	+	-

یعنی معادله $f(\frac{x}{2}) - 2x^2 = 0$ دو ریشه -2 و 6 دارد.

$$x = -2 \Rightarrow f(-1) - 8 = 0 \Rightarrow f(-1) = 8$$

$$x = 6 \Rightarrow f(3) - 72 = 0 \Rightarrow f(3) = 72$$

f تابعی خطی است، پس:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = -a + b = 8 \\ f(3) = 3a + b = 72 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 4a = 64 \Rightarrow a = 16$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱۱- اگر $g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1}$ و $(fog^{-1})(x) = 2x+1$ باشد، مقدار $f^{-1}(5)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر f وارون پذیر باشد در این صورت: $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

$$(fog^{-1})(x) = 2x+1 \Rightarrow f(g^{-1}(x)) = 2x+1 \Rightarrow g^{-1}(x) = f^{-1}(2x+1) \xrightarrow{x=2} g^{-1}(2) = f^{-1}(5)$$

برای محاسبه $g^{-1}(2)$ تابع $g(x)$ را برابر ۲ قرار می دهیم:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} = 2 \Rightarrow \sqrt{3x+1} = 2 - \sqrt{x+1} \xrightarrow{()^2} 3x+1 = 4 + x + 1 - 4\sqrt{x+1} \Rightarrow 4\sqrt{x+1} = 4 - 2x$$

$$\xrightarrow{\div 2} 2\sqrt{x+1} = 2 - x \xrightarrow{()^2} 4x+4 = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0, 8$$

$x=0$ قابل قبول است، پس $f^{-1}(5) = 0$ خواهد بود.

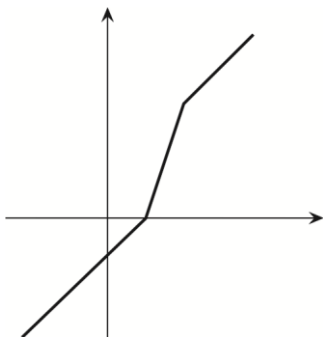
۱۲- در مورد تابع $y = |x-1| - |x-2| + x$ کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) صعودی اکید است. (۲) نزولی اکید است.
(۳) ابتدا صعودی اکید، سپس نزولی اکید است. (۴) ابتدا نزولی اکید، سپس صعودی اکید است.

پاسخ: گزینه ۱

برای رسم از نقاط شکستگی استفاده می کنیم. ریشه های ساده داخل قدرمطلق نقاط شکستگی تابع هستند.

x	۰	۱	۲	۳
y	-۱	۰	۳	۴



با توجه به شکل، تابع مورد نظر روی $\mathbb{R}$ صعودی اکید است.

۱۳- تابع $f(x) = \frac{\cos 2x + 4}{\cos 3x + \sin x}$ به ازای کدام مقادیر زیر تعریف نمی شود؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

پاسخ: گزینه ۴

$$U = 2k\pi \pm V$$

نکته: در معادلات به فرم $\cos U = \cos V$ ، جواب کلی برابر است با:

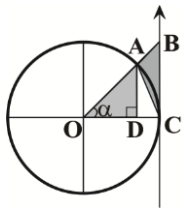
تابع $f(x)$ در نقاطی که مخرج را صفر می کند، تعریف نمی شود.

$$\cos 3x + \sin x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\sin x \Rightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱۴- در دایره مثلثاتی شکل زیر، مساحت مثلث AOD چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



$$(1) \tan^2 \alpha \cos \alpha$$

$$(2) \cot^2 \alpha (1 + \cos \alpha)$$

$$(3) \cot^2 \alpha (1 + \sin \alpha)$$

$$(4) \tan^2 \alpha (1 + \cos \alpha)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$S_1 = S_{OAD} = \frac{1}{2} AD \times OD = \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$S_2 = S_{ABC} = S_{OBC} - S_{OAC} = \frac{1}{2} \times OC \times BC - \frac{1}{2} \times AD \times OC$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan \alpha - \frac{1}{2} \times \sin \alpha \times 1 = \frac{1}{2} (\tan \alpha - \sin \alpha)$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{1}{2} (\tan \alpha - \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{\cos \alpha} - 1} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \times \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \cot^2 \alpha (1 + \cos \alpha)$$

۱۵- دوره تناوب تابع $f(x) = \sin^2 x - \sin^4 x$ کدام است؟

$$\pi \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا تابع را به ساده ترین صورت تبدیل می کنیم:

$$f(x) = \sin^2 x (1 - \sin^2 x) = \sin^2 x \cos^2 x = (\sin x \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2x$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$16- f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4[-x] + 7}{3 - x} & x > 3 \\ ax + 1 & x = 3 \text{ اگر تابع } \\ \left[\frac{2}{3} ax^2\right] - x & x < 3 \end{cases}$$

در $x = 3$ پیوستگی راست داشته باشد، حد راست تابع در $x = 2$ چقدر است؟

$$5 \quad (4)$$

$$-7 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$-4 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 4[-x] + 7}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 4(-4) + 7}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{-(x-3)} = - \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+3) = -6$$

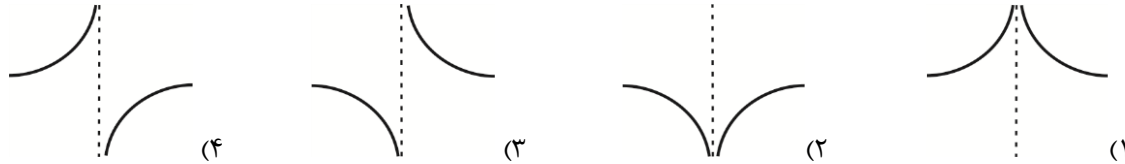
$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow 3a + 1 = -6 \Rightarrow 3a = -7 \Rightarrow a = \frac{-7}{3}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\left[\frac{3}{y} \times \frac{-y}{3} x^2 \right] - x \right) = \lim_{x \rightarrow 3^+} ([-x^2] - x) = [-(3^+)^2] - 3 = [(-4)^-] - 3 = -5 - 3 = -8$$

۱۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{[x+1] - (-1)^{[x]}}{3-x}$ در همسایگی $x=3$ چگونه است؟



پاسخ: گزینه ۴

برای تعیین وضعیت تابع در همسایگی ریشه مخرج، باید حد چپ و راست تابع را در اطراف ریشه مخرج محاسبه کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{[4^+] - (-1)^{[3^+]}}{3 - 3^+} = \frac{4 - (-1)}{-} = \frac{5}{-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{[4^-] - (-1)^{[3^-]}}{3 - 3^-} = \frac{3 - (-1)^2}{+} = \frac{2}{+} = +\infty$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۱۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x|x-1| + x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 + x} + x}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴

چون $x \rightarrow \infty$ پس عبارت داخل قدرمطلق منفی است. از طرفی طبق هم‌ارزی زیر داریم.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \sim \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| \quad x \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x|x-1| + x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1-x) + x^2 - x + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x^2 + x^2 - x + 1}{-x - \frac{1}{x} + x} = \frac{1}{-\frac{1}{x}} = -2$$

۱۹- مشتق تابع $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2 - x}}{x^2 + x} \right)^3$ در نقطه $x = -2$ کدام است؟

- (۱) ۳/۲۵ (۲) ۲/۲۵ (۳) ۲/۵ (۴) ۲/۷۵

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{(x^2 + x)^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x)^3 - 3(x^2+x)^2(2x+1)(x^2-x)}{(x^2+x)^6}$$

$$\Rightarrow f'(-2) = \frac{-5(2)^3 - 3(2)^2(-3)(6)}{(4-2)^6} = \frac{-40 + 216}{2^6} = \frac{176}{64} = \frac{2}{75}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۲۰- $f(x)$ یک تابع خطی است که محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند، اگر تابع $g(x) = (x^2 - kx + \ell)[f(x)]$ در $x=2$ مشتق پذیر باشد، مقدار $k + \ell$ چقدر است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

چون $f(x)$ تابعی خطی و $f(2)=0$ است، پس $[f(x)]$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است، برای آن که تابع $g(x) = (x^2 - kx + \ell)[f(x)]$ در نقطه $x=2$ مشتق پذیر باشد، بایستی معادله $x^2 - kx + \ell = 0$ ریشه مضاعف $x=2$ داشته باشد، پس باید ضریب برکت به صورت $(x-2)^2$ باشد.

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \begin{cases} k=4 \\ \ell=4 \end{cases} \Rightarrow k+\ell=8$$

۲۱- آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x) = x^3 + x$ در نقطه $x=c$ برابر آهنگ متوسط آن در فاصله $[0,1]$ است، آهنگ لحظه‌ای $f(x)$ در نقطه $x=2c$ چقدر است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نکته: آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x)$ در $x=c$ برابر $f'(c)$ و آهنگ متوسط تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ برابر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ است.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow 3c^2 + 1 = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{2-0}{1} = 2 \Rightarrow 3c^2 = 1 \xrightarrow{c \in [0,1]} c = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2c = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f'(2c) = f'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = 5$$

۲۲- اگر $f(x) = x^3 - 6x^2 + b$ در نقطه $(a, 2)$ مینیمم نسبی و در نقطه $(0, c+1)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۶۰ (۴)

۷۱ (۳)

۶۱ (۲)

۵۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, 4$$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
f'		$+$	$-$	$+$

با توجه به جدول تعیین علامت، $x=0$ طول ماکزیمم نسبی و $x=4$ طول مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است، پس $a=4$

$$f(a) = 2 \Rightarrow f(4) = 2 \Rightarrow 64 - 6 \times 16 + b = 2 \Rightarrow b = 2 + 32 = 34$$

$$f(0) = c+1 \Rightarrow b = c+1 \Rightarrow c = 34 - 1 = 33 \Rightarrow a+b+c = 71$$

۲۳- بیشترین مقدار تابع $y = \frac{x^3}{1+x}$ در فاصله $[0,1]$ چقدر است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

صفر (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



پاسخ: گزینه ۱

بیشترین و کمترین مقدار تابع پیوسته در بازه بسته در نقاط بحرانی تابع رخ می‌دهد، بنابراین نقاط بحرانی تابع را محاسبه و مقادیر آن را بدست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(1+x) - x^3}{(1+x)^2} = \frac{x^2(3+3x-x)}{(1+x)^2} = \frac{x^2(3+2x)}{(1+x)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \in D_f \\ x=-\frac{3}{2} \notin D_f \end{cases}$$

تابع دو نقطه بحرانی $x=0$ و $x=1$ دارد.

$$\begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow \min f(x) = 0 \\ f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \max f(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۲۴- دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2} - 2\sqrt{3}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۷ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

برای دامنه چنین توابعی باید دو اتفاق بیفتد، اول اینکه زیر رادیکال منفی نشود و دوم اینکه مخرج صفر نشود.

$$16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$\sqrt{16-x^2} - 2\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{16-x^2} \neq 2\sqrt{3} \Rightarrow 16-x^2 \neq 12 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

پس دامنه تابع $\{-2, 2\} - [-4, 4]$ خواهد بود که این مجموعه دارای ۷ عضو صحیح است.

۲۵- اگر معادله $|x^2 - 4x| = k$ چهار جواب متمایز داشته باشد، حدود k کدام است؟

$1 < k < 6$ (۴)

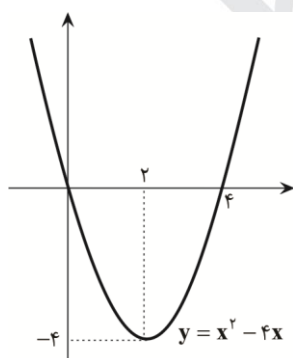
$1 < k < 5$ (۳)

$0 < k < 6$ (۲)

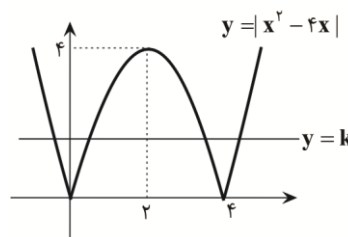
$0 < k < 4$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

برای یافتن تعداد ریشه‌های معادله $f(x) = g(x)$ می‌توانیم دو تابع $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ را رسم کنید. طول نقاط برخورد دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ ریشه‌های معادله $f(x) = g(x)$ است.



نمودار دو تابع $\begin{cases} y = |x^2 - 4x| \\ y = k \end{cases}$ را رسم می‌کنیم، تعداد نقاط برخورد برابر تعداد ریشه‌هاست.

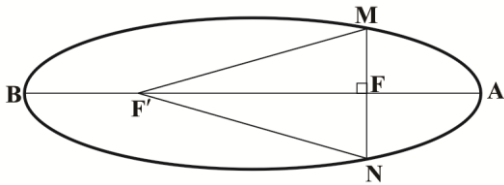


اگر قرار باشد معادله چهار ریشه حقیقی داشته باشد باید $0 < k < 4$ باشد.

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

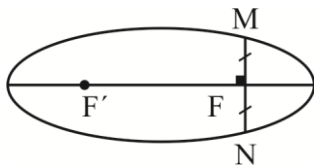


۲۶- در بیضی شکل مقابل، خروج از مرکز $\frac{3}{4}$ و طول قطر کوچک ۴ است، مساحت مثلث MNF' چقدر است؟



- ۹ (۱)
۶ (۲)
۷ (۳)
۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۲



نکته: در شکل مقابل، پاره خط MN را وتر کانونی بیضی می‌نامیم و مقدار آن $MN = \frac{2b^2}{a}$ است.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}, \quad 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$S_{MNF'} = \frac{1}{2} MN \times FF' = \frac{1}{2} \times \frac{2b^2}{a} \times 2c = 2 \times \frac{c}{a} \times b^2 = 2 \times \frac{3}{4} \times 4 = 6$$

۲۷- معادله دایره‌ای با بزرگترین شعاع که در ناحیه سوم بر سه خط $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 3x+4y+12=0 \end{cases}$ مماس باشد کدام است؟

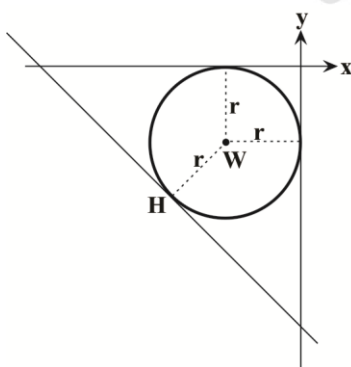
$$x^2 + y^2 + 12(x+y) + 6 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 + y^2 + 12(x+y) + 36 = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 + y^2 + 12(x+y) = 36 \quad (۴)$$

$$x^2 + y^2 + 12(x+y) + 24 = 0 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱



چون دایره بر هر دو محور مختصات در ناحیه سوم مماس است پس می‌توانیم مرکز دایره را $W(-r, -r)$ فرض کنیم که r شعاع دایره است. حال فاصله مرکز دایره تا خط $3x+4y+12=0$ را برابر شعاع دایره قرار می‌دهیم:

$$|WH| = r \Rightarrow \frac{|-3r-4r+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = r \Rightarrow |12-7r| = 5r \Rightarrow \begin{cases} 12-7r = 5r \Rightarrow r=1 \\ 12-7r = -5r \Rightarrow r=6 \end{cases}$$

$$\text{معادله دایره } (x+6)^2 + (y+6)^2 = 36 \Rightarrow x^2 + y^2 + 12(x+y) + 36 = 0$$

۲۸- با جایگشت ارقام عدد ۳۴۵۹۰، اعداد پنج رقمی بدون تکرار ارقام ساخته‌ایم، عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم، اگر این عدد مضرب ۵ باشد، با چه احتمالی زوج است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{7} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

از فضای نمونه‌ای کاهش یافته استفاده می‌کنیم. یعنی فضای نمونه‌ای را اعداد مضرب ۵ در نظر می‌گیریم.
حالت اول: رقم یکان صفر باشد:

$$\underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} \times \underline{0} = 24$$

صفر باشد

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد:

$$\underline{3} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} \times \underline{5} = 18$$

۵ باشد صفر نباشد

پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A) = \frac{24}{24+18} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

۲۹- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، اگر اعداد دو تاس را بر هم تقسیم کنیم و آن عدد را x بنامیم، با چه احتمالی $\log_2 x$ یک عدد صحیح است؟

$$\frac{7}{18} \quad (4)$$

$$\frac{11}{36} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{13}{36} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

باید نسبت اعداد رو شده به صورت 2^n باشد تا لگاریتم آن در پایه ۲ عددی صحیح شود. ضمناً توجه کنید که ترتیب تقسیم کردن مهم نیست زیرا اگر $\frac{a}{b} = 2^n$ باشد، آن‌گاه $\frac{b}{a} = 2^{-n}$ است.
جدولی تنظیم می‌کنیم و خانه‌هایی که نسبت آنها توان صحیحی از ۲ شوند را علامت می‌زنیم.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	✓	✓		✓		
۲	✓	✓		✓		
۳			✓			✓
۴	✓	✓		✓		
۵					✓	
۶			✓			✓

با توجه به جدول، ۱۴ مورد از ۳۶ مورد خاصیت فوق را دارند. پس: $P(A) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۳۰- دو ظرف یکسان داریم، در ظرف اول n مهره آبی و ۵ مهره قرمز و در ظرف دوم ۵ مهره آبی و n مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول ۳ مهره و اول ظرف دوم ۷ مهره را درون ظرف سومی قرار داده و از آن مهره‌ای انتخاب می‌کنیم. این مهره با احتمال $۰/۵$ آبی است. مجموع تعداد مهره‌های دو ظرف در ابتدا چند تا بوده است؟

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۱۹ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

تعداد مهره‌های ظرف سوم ۱۰ تا است که ۳ تای آن‌ها از ظرف اول و ۷ تای آن‌ها از ظرف دوم انتخاب شده است، پس:

$$P(\text{ظرف دوم} | \text{آبی}) = P(\text{ظرف دوم}) + P(\text{ظرف اول} | \text{آبی}) P(\text{ظرف اول})$$

$$P = \frac{3}{10} \times \frac{n}{n+5} + \frac{7}{10} \times \frac{5}{n+5} = \frac{5}{10} \Rightarrow \frac{3n+35}{n+5} = 5 \Rightarrow 3n+35=5n+25 \Rightarrow 2n=10 \Rightarrow n=5$$

پس مجموع تعداد مهره‌های دو ظرف در ابتدا ۲۰ تا بوده است.

biomaze.ir

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

